

Feladat 1. (1pt) A $\mathbb{Z}_2[x]/(x^5 + x^2 + 1)$ testben adjuk meg az $\overline{x^3 + 1}$ elem minimálpolinomját.

Feladat 2. (1pt) A $\mathbb{Z}_2[x]/(x^5 + x^2 + 1)$ testben adjuk meg az $\overline{x^4 + x^2}$ elem minimálpolinomját.

Feladat 3. (1pt) Mennyi a multiplikatív rendje a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^6 + x^5 + 1)$ testben az $\overline{x^5 + x^2 + x}$ elemnek?

Feladat 4. (1pt) Mennyi a multiplikatív rendje a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^6 + x^5 + 1)$ testben az $\overline{x^5 + x^3 + 1}$ elemnek?

Feladat 5. (2pt) Létezik olyan \mathbf{K} test, amelyre a $\mathbf{K}[x, y]/(x^2 + y^2)$ gyűrű véges?

Feladat 6. (2pt) Adjuk meg az $f := \sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}$ szám minimálpolinomját \mathbb{Q} fölött, annak felhasználásával, hogy $\deg_{\mathbb{Q}} f = 12$.

Feladat 7. (2pt) Irreducibilis polinom a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} - 1)$ testben az $x^4 - 2$?

Feladat 8. (2pt) Döntsük el, hogy a $\mathbb{Q}[x, y]/(x + y)$ gyűrű test-e.

Feladat 9. (2pt) Tegyük fel, hogy $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ egy szürjektív gyűrűhomomorfizmus. Igaz, hogy amennyiben \mathbf{R} integritástartomány, akkor \mathbf{S} is az?

Feladat 10. (2pt) Igaz, hogy minden \mathbf{K} test esetén van a $\mathbf{K}^{\infty}[x]$ gyűrűben maximális ideál?

Feladat 11. (2pt) Adjunk meg egy maximális ideált a $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ gyűrűben. Mi lesz (izomorfia erejéig) a vele vett faktor?

Feladat 12. (3pt) Adjuk meg $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ résztesteit.

Feladat 13. (3pt) Legyen $\mathbf{K}(u) | \mathbf{K}$ testbővítés, $p \in \mathbf{K}[x]$ pedig egy legalább elsőfokú polinom. Igazoljuk, hogy a $\mathbf{K}(u) | \mathbf{K}$ testbővítés akkor és csak akkor algebrai, ha a $\mathbf{K}(p(u)) | \mathbf{K}$ is az.

Feladat 14. (3pt) Igazoljuk, hogy

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 9.$$

Feladat 15. (4pt) Adjuk meg a $d := \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$ szám minimálpolinomját \mathbb{Q} fölött.

Feladat 16. (4pt) Integritástartomány az $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ gyűrű?

Feladat 17. (4pt) Létezik olyan \mathbf{K} test, amelyre a \mathbf{K}^2 gyűrűnek van olyan részteste (vagyis olyan részgyűrűje, ami test), ami nem izomorf \mathbf{K} egy résztestével?

Feladat 18. (4pt) Nevezzük gyenge integritástartománynak az egységelemes, zérusosztómentes gyűrűket. Igaz, hogy ha \mathbf{R} gyenge integritástartomány, \mathbf{I} pedig maximális ideálja, akkor \mathbf{R}/\mathbf{I} ferdetest?

Feladat 19. (5pt) Igazoljuk, hogy ha $f := \sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}$, akkor $\deg_{\mathbb{Q}} f = 12$.

Feladat 20. (5pt) Legyen $\mathbf{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots)$. Létezik olyan negyedfokú racionális együtthatós polinom, ami \mathbf{K} felett irreducibilis?